Omówienie zadań z turnieju indywidualnego nr 25

Paulina Żeleźnik i Marek Muzyka

21 grudnia 2024

1 Ciepłe skarpety

Marek widzi skarpety o niemalejących numerach. Jeżeli widział pewną skarpetę, a potem przestał, to musiała wtedy zostać zabrana. Gwarantowane jest, że zawsze istnieje odpowiedź, więc bez straty dla ogólności, skarpety, o których nie wiemy, kiedy zostały wzięte, możemy wziąć z kominka zachłannie od najmniejszych numerów.

2 Kalendarz adwentowy

Od N-tego do 24. grudnia włącznie jest $24 - N + 1$ dni. Każdego z nich Marek chce zjeść tyle samo czekoladek, których jest 24. Marek może jeść tyle samo czekoladek dziennie, tylko jeśli $24 - N + 1$ dzieli 24.

Starczy więc wypisać TAK, jeśli $24 - N + 1$ jest dzielnikiem 24 lub NIE w przeciwymym przypadku.

3 Odliczanie

Wyróżnijmy trzy proste, jedna z nich będzie zawierać segmenty dolne wszystkich cyfr, druga segmenty środkowe, a trzecia górne. Zauważmy, że nasze cięcie będzie przecinało każdą z tych prostych w jednym punkcie. Nie ważne jest, gdzie dokładnie jest ten punkt, tylko w obrębie której cyfry on jest (może też być między dwoma cyframi, albo zupełnie poza wyświetlaczem). Mamy więc $O(n)$ kandydatów na punkt przecięcia z jedną prostą. Teraz możemy w $O(n^3)$ sprawdzić wszystkie możliwe cięcia.

Zauważmy teraz, że wybór dwóch punktów zostawia tylko 3 możliwości na wybór trzeciego. Możemy więc zoptymalizować nasz algorytm do $O(n^2)$.

Uważna analiza tego, jak przecięcie cyfr w różnych miejscach wpływa na liczbę utworzonych fragmentów, pozwala pokazać, że prawie zawsze optymalnie jest wybrać punkt przecięcia z dolną i górną prostą poza wyświetlaczem. Starczy więc w $O(n)$ przejść się po punkcie przecięcia ze środową prostą. Trzeba rozważyć jeszcze jeden przypadek, który może polepszyć rozwiązanie – punkt przecięcia z dolną (lub górną) prostą może być w obrębie pierwszej lub ostatniej cyfry, w tym przypadku czasami wynik polepsza się o 1.

Po rozważeniu tych przypadków w $O(1)$ uzyskujemy optymalny wynik.

4 Prawo jazdy

Zauważamy, że możemy puścić Dijkstrę od miasta A do miasta B, w której odległością jest para liczb: długość aktualnej trasy i czas od ostatniego postoju. Można dowieźć, że rozpatrując wierzchołki po najmniejszej odległości od miasta A, a w drugiej kolejności od ostatniego postoju, obliczymy najkrótszy czas dojazdu do każdego miasta.

5 Szał zakupowy

Na początku przenumerujmy wszystkie koszty z wejścia. Po każdej zmianie chcielibyśmy dla każdej ceny wiedzieć, ile prezentów możemy kupić, jeżeli ona jest najtańszym kupionym prezentem. Wtedy odpowiedzią jest maksymalna z tych wartości.

Policzyć to możemy za pomocą drzewa przedziałowego. Gdy Markowi zaczął podobać się prezent o koście x, to każdy prezent o koście od $\frac{x+1}{2}$ do x ma o jeden więcej prezent, który może kupić, a gdy przestaje się podobać do o jeden mniej.

6 Wstążka

Ukorzeńmy drzewo, które tworzą bombki i lampi w 1. Zauważmy, że po i-tym ruchu wstążka będzie na głębokości maksymalnie i. Optymalne więc będzie zabieranie bombki z głębokości i w i-tym ruchu. Zmieńmy, więc treść zadania. Chcemy znaleźć zbiór wierzchółków, które nie są korzeniem i mają parami różne głębokości, a także

Nazwijmy wierzchołki o głębokości K liśćmi. Możemy usunąć wierzchołki, które nie mają liścia w swoim poddrzewie, bo jeśli Marek tam dojdzie, to Paulina przegrywa. Teraz nasze liście są faktycznie liśćmi drzewa.

Łatwo pokazać, że jeżeli $K^2 \geqslant n$ to Marek zawsze wygra. Pozostało, więc rozważyć przypadek małego K.

Jeśli $k \leqslant 20$ to możemy pozwolić sobie na użycie rozwiązania wykładniczego. Niech $DP[x][mask]$ oznacza czy jesteśmy w stanie przykryć pierwsze x liści (przypomnijmy sobie, że wszystkie liście są na głębokości k), usuwając bombki na głębokościach wyznaczonych przez $mask$. Teraz starczy przeiterować się po wierzchołkach w kolejności dfs i zaktualizować DP na podstawie tego, jakie liście ta bombka przykrywa.

Sumaryczna złożoność to $O(2^{\sqrt{n}} \cdot n)$

7 Zębatki

Przedstawmy naszą zabawkę jako graf, w którym zębatki są wierzchołkami i dwa wierzchołki połączone są krawędzią, jeśli odpowiadające im zębatki się zazębiają. Teraz możemy pokolorować wierzchołki na dwa kolory, które będą odpowiadały temu, w jaką stronę kręcą się zębatki. Dwa wierzchołki połączone krawędzią muszą mieć różne kolory, bo odpowiadające im zębatki muszą kręcić się w różne strony. Zadanie sprowadza się, więc do wygenerowania grafu i sprawdzenia, czy jest on dwukolorowalny.

Aby szybko wygenerować graf, należy zauważyć, że dowolna zębatka może się zazębiać z co najwyżej sześcioma innymi. Wynika to z tego, że wszystkie mają ten sam promień i tylko odrobinę na siebie nachodzą. Możemy teraz podzielić płaszczyznę na kwadraty o boku R. Zauważmy, że w każdym kwadracie będzie znajdywał się co najwyżej jeden środek zębatki. Teraz dla każdej zębatki starczy sprawdzić wszystkie kwadraty, które mają szansę zawierać zębatkę oddaloną o co najwyżej 2R, jest ich O(1). W ten sposób budujemy graf w złożoności O(n).

Sprawdzenie, czy graf jest dwudzielny, można zrealizować kolorując go zachłannie na przykład algorytmem dfs.

Sumaryczna złożoność rozwiązania to O(n).